Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

6 клас

1. Обчисліть значення виразу $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2018}\right)$.

2. У родині Петренка – четверо дітей (хлопчик і три дівчинки): 5, 8, 13 і 15 років. Одна дівчинка ходить у дитячий садок, Таня старша за Юру, а сума років Тані та Світлани ділиться на 3. З'ясуйте, скільки років кожній дитині. Відповідь обґрунтуйте.

3. Прямокутник розрізаний на 9 менших прямокутників, як показано на рис. 1. Відомо, що сума периметрів сірих прямокутників дорівнює 8, а сума периметрів білих прямокутників – 10. З'ясуйте, чому дорівнює периметр великого прямокутника? Відповідь обґрунтуйте.

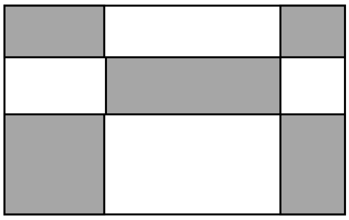

Рис. 1

4. Учитель на дошці записав число 12341234123412341234. З'ясуйте, які цифри з цього числа необхідно викреслити, щоб отримати найбільше число, що ділиться на 9? Відповідь обґрунтуйте та запишіть число, що отримали.

5. Куб із ребром 3 розрізано на 27 менших кубиків зі стороною 1. Після цього 21 маленький кубик було пофарбовано у жовтий колір, а 6 інших – у блакитний. Потім із малих кубиків знову склали великий таким чином, щоб частина поверхні великого кубика мала якомога менше блакитних фрагментів. З'ясуйте, яку частину за таких умов від усієї площі поверхні куба утворюють блакитні частини? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 3 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

7 клас

1. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{x+2018}$, якщо $\frac{1}{x+2017}=3$.

2. Батьки Сашка купили дві свічки до дня народження однакової висоти, але одна з них згорає за чотири години, а інша – за дві (свічки різної товщини). Коли Сашко загадав бажання та загасив свічки, то одна була в три рази нижче за іншу. З'ясуйте, скільки часу щасливі родичі вітали хлопчика? Відповідь обґрунтуйте.

3. Побудуйте графік функції $y=2[x]-1$, де $[a]$ – ціла частина числа a.

4. У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. На стороні AB позначено точку M так, що $MD \parallel AC$ і $\angle MDA = \angle MDB$. Знайдіть довжину відрізка DC, якщо $AD=5$.

5. Учитель на дошці записав число 12341234123412341234. З'ясуйте, які цифри з цього числа необхідно викреслити, щоб отримати найбільше число, що ділиться на 9? Відповідь обґрунтуйте та запишіть число, що отримали.

6. Двоє гравців Олесь та Сашко по черзі роблять ходи на смужці 1×17, клітинки якої пронумеровано послідовними натуральними числами. За один хід необхідно закреслити одну довільну клітинку в смужці, або деякі дві послідовні, де перша з них парна. Програє той, хто не зможе зробити хід. З'ясуйте, хто перемагає в цій грі: той хто починає чи його суперник? Укажіть виграшну стратегію. Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

8 клас

1. Обчисліть значення виразу: $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+2016\cdot 2017+2017\cdot 2018}{1^2+3^2+...+2017^2}$.

2. Олег і Світлана живуть у хмарочосі на бульварі Лесі Українки, на кожному поверсі якого по 10 квартир. Номер поверху Олега дорівнює номеру квартири Світлани, а сума номерів їх квартир – 239. З'ясуйте, у якій квартирі мешкає Олег? Відповідь обґрунтуйте.

3. Дійсні числа a, b, c задовольняють умови: $ab-c=1000$, $bc-a=1018$ та $ca-b=-2018$. Доведіть, що $a+b+c\neq 0$.

4. На бісектрисі *AL* трикутника *ABC* вибрано точку *D*. Відомо, що $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Доведіть, що $BC+CD = AB$.

5. Учитель писав на дошці цифри 1, 2, 3,…, 9, 1, 2, 3,…, 9, 1, 2, 3… послідовно у вказаному порядку, опускаючи коми, доти, поки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся почали грати в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином: або дві перші цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або дві останні цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишається двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 3, в іншому випадку перемагає Андрій. З'ясуйте, хто переможе за правильної гри обох гравців? Відповідь обґрунтуйте.

6. Двоє гравців Петро та Сашко по черзі роблять ходи на прямокутнику в клітинку розміром 2018×5. Кожен з них одним своїм ходом може зафарбувати квадрат розміром 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 або 5×5. При цьому цей квадрат не повинен містити вже раніше зафарбованих клітинок. Виграє той, хто фарбує останню не зафарбовану клітинку прямокутника. З'ясуйте, хто перемагає в цій грі: Петро, який розпочинає гру, чи Сашко, якщо кожний прагне виграти? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

9 клас

1. Учитель записав на дошці всі натуральні числа від 1 до 2018: 1, 2, 3, …, 2018. Потім він викреслив два числа таким чином, що сума всіх чисел, які були розташовані між викресленими числами, виявилась вдвічі меншою від суми всіх інших, не викреслених чисел. Знайдіть ці числа. Відповідь обґрунтуйте.

2. Різні додатні дійсні числа a і b такі, що $\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}$. Обчисліть значення виразу: $(a+b)^3+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3$.

3. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AD і CE. Точки M і N – основи перпендикулярів, опущених на пряму DE з точок A і C відповідно. Доведіть, що $ME = DN$.

4. Доведіть, що якщо $a>0,\ b>0$ і $a\cdot b>2017a+2018b$, то $a+b>(\sqrt{2017}+\sqrt{2018})^2$

5. З’ясуйте, чи можуть відстані від деякої точки на площині до вершин деякого квадрата на цій площини дорівнювати 1, 2016, 2018 і 2019? Відповідь обґрунтуйте.

6. Двоє гравців Петро та Сашко по черзі роблять ходи на прямокутнику в клітинку розміром 2018×5. Кожен з них одним своїм ходом може зафарбувати квадрат розміром 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 або 5×5. При цьому цей квадрат не повинен містити вже раніше зафарбованих клітинок. Виграє той, хто фарбує останню не зафарбовану клітинку прямокутника. З’ясуйте, хто перемагає в цій грі: Петро, який розпочинає гру, чи Сашко, якщо кожний прагне виграти? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

10 клас

1. Різні додатні дійсні числа a і b такі, що $\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}$. Обчисліть значення виразу: $(a+b)^3+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3$.

2. Сума номерів будинків на одній стороні кварталу дорівнює 423. Визначіть номер будинку, який розташований п'ятим від початку кварталу. Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть, що якщо $a>0, b>0$ і $a\cdot b>2017a+2018b$, то $a+b>(\sqrt{2017}+\sqrt{2018})^2$

4. З’ясуйте, чи можуть відстані від деякої точки на площині до вершин деякого квадрата на цій площини дорівнювати 1, 2016, 2018 і 2019? Відповідь обґрунтуйте.

5. На колі розташовані точки P, A, B, а всередині кола – точка Q таким чином, що $\angle PAQ=90^\circ$, $PQ=QB$ та точки P і B лежать по різні боки від прямої AQ. Доведіть, що $\angle AQB-\angle PQA=2\angle APB$.

6. Петро та Василь по черзі пишуть на дошці натуральні числа, що не перевищують 2018 (виписувати числа, які вже записано заборонено). Розпочинає гру Петро. Якщо після ходу гравця на дошці з'являються три числа, які утворюють арифметичну прогресію, то цей гравець виграє. З’ясуйте, у кого з гравців виграшна стратегія? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Завдання
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2018-2019 н.р.

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \left(\log_{2018} x^{2018}\right)^0 \cdot \frac{\left|x^3\right| + 8}{x^2 - 2x + 4}$.

2. Доведіть, що якщо $a > 0, b > 0$ і $a \cdot b > 2017a + 2018b$, то $a + b > (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$.

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких число $a^{2018} + b$ ділиться на ab.

4. В опуклому п’ятикутнику $PQRST$ кут PRT у два рази менше, ніж кут QRS, а всі сторони рівні. Знайдіть кут PRT. Відповідь обґрунтуйте.

5. Петро та Василь по черзі пишуть на дошці натуральні числа, що не перевищують 2018 (виписувати числа, які вже записано заборонено). Розпочинає гру Петро. Якщо після ходу гравця на дошці з'являються три числа, які утворюють арифметичну прогресію, то цей гравець виграє. З’ясуйте, у кого з гравців виграшна стратегія? Відповідь обґрунтуйте.

6. З’ясуйте, чи існують функції $f : (0; 1) \to (2018; +\infty)$, для яких одночасно виконуються такі умови:

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для довільних $x, y \in (0; 1)$;

для кожного $y \in (2018; +\infty)$ існує $x \in (0; 1)$: $f(x) = y$?

Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється