Відповіді ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.

6 клас

1. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2018}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2018}=\frac{2019}{2}=1009{,}5$

Відповідь: 1009,5.

2. Оскільки у дитячий садок ходить дівчинка, те це точно не Юра, якому не менш 8 років, тому що Таня старше Юри, їй 13 або 15 років, а оскільки сума років Тані та Світлани ділиться на 3, то це тільки 13, адже 15 у сумі з будь-яким іншим віком не ділиться на три. Отже, Тані – 13 років. Оскільки Таня старше Юри, а йому не менш 8, то Юрі 8 років. Тепер, сума віку Тані та Світлани ділиться на три, Тані 13, а Світлані 5 або 15, друге не підходить, а значить Світлані 5 років. Залишається Олена – їй 15 років.

Відповідь: Світлані 5 років, Юрі 8 років, Тані 13 років, Олені 15 років.

3. Якщо додати ці периметри, то легко побачити, що кожний відрізок периметра великого прямокутника додається 3 рази, тому шукане значення периметру – це $\frac{18}{3}=6$.

Відповідь: 6.

4. Найбільше число можна отримати, якщо викреслити найменшу кількість цифр. Усього це число має суму цифр 50. Щоб отримати число, що кратне 9, треба викреслити цифри з сумою 5. (Зрозуміло, що при викреслюванні цифр з сумою 14 та більше число тільки стане ще меншим). Одну цифру викреслити не достатньо, тому слід викреслити цифри 1 та 4 або 2 та 3. Кількість цифр буде однаковою, тому слід зробити першу цифру максимальною з можливих. Якщо викреслити 2 та 3, то перша залишиться 1. Якщо викреслити першу 1, то 4 треба викреслити останньою. Матимемо число $2341234123412341 23$.

Відповідь: 234123412341234123.

5. З усіх 27 кубиків 1 розташований повністю всередині великого кубика, ще 6 мають з поверхнею великого кубика рівно 1 грань, ще 12 – по 2 спільні квадратики, і ті 8, що розашовані по кутах великого кубика мають по 3 спільні грані.

Таким чином, для найменшої кількості блакитних граней має бути 1 всередині та інші 5, щоб мали рівно 1 спільну грань.

Таким чином, усього 5 блакитних малих квадратиків з $9\cdot 6=54$.

Отже, шукане відношення $\frac{5}{54}$.

Відповідь: $\frac{5}{54}$.

7 клас

1. З рівняння $x+2017=\frac{1}{3}$ маємо, що $x+2018=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, тоді $\frac{1}{1+2018}=\frac{3}{4}$.

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

2. Нехай за час горіння товста свічка зменшилась на x, тоді тонка зменшилась на 2 x. Приймемо висоту свічки за 1, тоді маємо рівняння:

1 – x=3(1 – 2 x), розв'язуючи яке отримуємо, що x=0,4 години, тобто 24 хвилини.

Відповідь: 24 хвилини.

3. Ордината кожної точки графіка функції $y = 2[x]-1$ на одиницю менша за відповідну ординату точки графіка функції $y = 2[x]$ (рис.1).

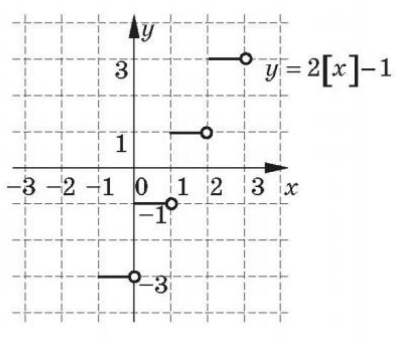

Рис. 1

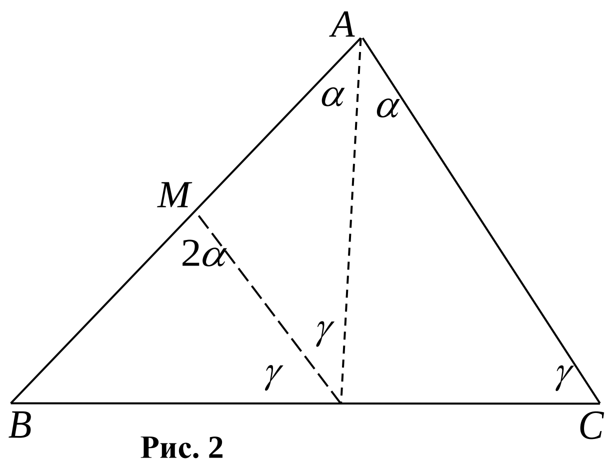

Рис. 2

4. З умов задачі $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ADM = \angle MDB = \gamma$, але тоді й $\angle ACD = \gamma$ та $\angle BMD = 2\alpha$ (рис. 2).

Тоді $\angle AMD = \angle ADC$, як кути у трикутнику, що мають два рівних кути. Але з іншого боку як суміжні: $\angle AMD = 180° - 2\alpha$, а $\angle ADC = 180° - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$, тому ΔADC – рівнобедрений і $AD = DC = 5$.

Відповідь: $DC = 5$.

5. Найбільше число можна отримати, якщо викреслити найменшу кількість цифр. Усього це число має суму цифр 50. Щоб отримати число, що кратне 9, треба викреслити цифри з сумою 5. (Зрозуміло, що при викреслюванні цифр з сумою 14 та більше число тільки стане ще меншим). Одну цифру викреслити не достатньо, тому слід викреслити цифри 1 та 4 або 2 та 3. Кількість цифр буде однаковою, тому слід зробити першу цифру максимальною з можливих. Якщо викреслити 2 та 3, то перша залишиться 1. Якщо викреслити першу 1, то 4 треба викреслити останньою. Матимемо число 23412341234123412З.

Відповідь: 234123412341234123.

6. Розіб'ємо клітинки з номерами 2-17 на 4 набори по 4 послідовні клітинки. Гравець, що починає спочатку закреслює першу клітинку з парним номером, а потім діє аналогічно до другого: якщо другий закреслює клітинку з парним номером, то той, хто починав – іншу парну цього вибору, якщо другий закреслює дві клітинки, то перший – інші дві клітинки цього набору, якщо другий закреслює клітинку з непарним номером, то той, хто починав – іншу непарну клітинку цього набору. Так завжди той, хто починає буде мати можливість ходу, отже можна забезпечити собі перемогу.

Відповідь: той, хто починає.

8 клас

1. $\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+2016\cdot 2017+2017\cdot 2018}{1^2+3^2+...+2017^2}$.

Розглянемо чисельник даного дробу та винесемо за дужки спільний множник – число 2. Маємо:

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8+\ldots+2016\cdot2017+2017\cdot2018=$

$=2(1+3+3\cdot2+2\cdot5+5\cdot3+3\cdot7+7\cdot4+\ldots+1008\cdot2017+2017\cdot1009)=$

$=2(1+3(1+2)+5(2+3)+7(3+4)+\ldots+2017(1008+1009))=2(1^2+3^2+\ldots+2017^2)$.

Скоротимо дріб і отримаємо відповідь.

Відповідь: 2.

2. Нехай x – номер квартири Олега. Тоді номер його поверху $239 - x$. Частка від ділення з остачею номера квартири на 10 дорівнює номеру попереднього поверху, тому $x=10\cdot(238-x)+r$, де $0\le r<9$.

Перетворюючи одержане рівняння, одержимо: $11x=2380+r$; $x=216+\dfrac{4+r}{11}$.

Оскільки x є натуральним числом, тоді $r=7$, тому $x=217$.

Відповідь: Олег мешкає в 217 квартирі.

3. Методом від супротивного, припустимо, що $a+b+c=0$. Тоді з умов випливає, що

$$ab+bc+ca=a+b+c=0.$$

Якщо припустити, що $abc=0$, тобто, наприклад, $c=0$, то $ab=0$, тоді маємо дві змінні, що дорівнюють нулеві. Вибираємо одне з заданих співвідношень, де ці змінні не пов'язані множенням і отримаємо суперечність. Таким чином $abc\neq 0$. Підставимо $c=-a-b$ в рівність $ab+bc+ca=0$. Звідси далі маємо, що

$$(a+b)b+(a+b)a-ab=0 \iff a^2+ab+b^2=0 \iff a^2+ab+\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{3}{4}b^2=0$$

$$\iff (a+\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2=0 \iff a=b=0.$$

Одержана суперечність завершує доведення.

4. На продовженні відрізка BC за точку C виберемо точку E так, що $CD=CE$ (рис.3). Тоді $\angle ACD=180^\circ-\angle DAC-\angle ADC=180^\circ-4\alpha=\angle ACE$. Отже, трикутники ACD и ACE рівні по двум сторонам і куту між ними, тому $\angle AEC=\angle ADC=3\alpha$ і $\angle CAE=\angle CAD=\alpha$. Зауважимо, що $\angle BAE=\angle BAC+\angle CAE=3\alpha=\angle AEB$. Таким чином, трикутник ABE рівнобедрений і $AB=BE=BC+CE=BC+CD$.

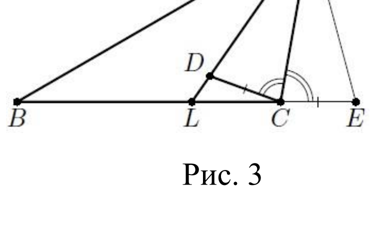

Рис. 3

5. Очевидно, що оскільки нас цікавить лише подільності на 3, то можна замінити усі числа таким чином: $1,\ 4,\ 7 \to 1,\ 2,\ 5,\ 8 \to 2$ та $3,\ 6,\ 9 \to 3$ і нічого в умові задачі не зміниться. Тоді після $2014:2=1007$ ходів на дошці буде записане чотирицифрове число і останній хід робить Олеся. Зрозуміло, що записаними будуть деякі 4 цифри, що утворюють чотирицифрове число, які з самого початку йшли поспіль. Тобто можливий один з таких варіантів: 1231, 2312 або 3123. В кожному з цих варіантів є пара цифр, що утворює число 12, саме їх і має лишити Олеся для перемоги.

Відповідь: перемагає Олеся.

6. Петро першим ходом фарбує квадрат 4×4, що розташований в середині прямокутника (рис. 4). Далі перемогу приносить симетрична відносно вертикальної прямої стратегія. Петро завжди може зробити хід, що симетричний ходові другого, а тому переможе.

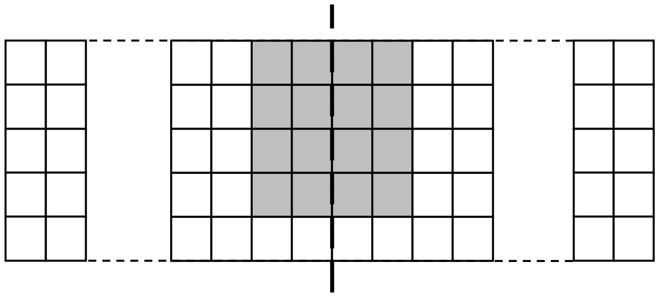

Рис. 4

Відповідь: Петро.

9 клас

1. Зауважимо, що суми чисел, рівновіддалених від кінців ряду, рівні: 1+2018 = 2+2017 = … = 1009+1010. Якщо витерти одну таку пару чисел, пар залишиться 1008 = 336·3. Отже, якщо між витертими числами буде 336 пар, то зовні залишиться 336·2 = 672 пари, і умову задачі буде виконано. Саме так і вийде, якщо витерти числа 673 і 1346.

Також підходять, наприклад, числа 1289 і 1738.

Відповідь: 673 і 1346.

2. Із умови задачі маємо

$$\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}=a(b^3+b+1)=b(a^3+a+1).$$

$$ab^3+ab+a=ba^3+ba+b.$$

$$ab^3-ba^3+a-b=0.$$

$$ab(b^2-a^2)+(a-b)=0.$$

$$ab(b-a)(b+a)+(a-b)=0$$

$$(b-a)(ab(a+b)-1)=0$$

$$(b-a)=0 \text{ або } ab(a+b)-1=0$$

$$a=b \qquad\qquad ab(a+b)=1$$

За умовою задачі $a\neq b$. Тоді, ураховуючи, що $ab(a+b)=1$, отримаємо

$$(a+b)^3+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3=$$

$= 3 \cdot 1 + \dfrac{2018}{2017+1} = 4$

<u>Відповідь</u>: 4.

3. У гострокутному трикутнику *ABC* проведено висоти *AD* і *CE*. Точки *M* і *N* – основи перпендикулярів, опущених на пряму *DE* з точок *A* і *C* відповідно. Доведіть, що *ME* = *DN*.

Оскільки $\angle ADC = \angle AEC$, то чотирикутник *AEDC* – вписаний.

Перший спосіб. За властивістю вписаного чотирикутника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$ (рис. 5).

Із прямокутних трикутників *AME* і *AEC*, отримуємо:

$ME = AE\cos\gamma = AC\cos\alpha\cos\gamma$.

Аналогічно, $DN = DC\cos\alpha = AC\cos\gamma\cos\alpha$.

Отже, *ME* = *DN*..

Зауважимо, що використані рівності кутів можна отримати з подібності трикутників *DBE* і *ABC*, які , в свою чергу, можна отримати з подібності трикутників *ABD* і *CBE* .

Другий спосіб. Скористаємося тим, що центром кола, описаного навколо *AEDC*, є середина O сторони *AC*. Оскільки трикутник *DOE* – рівнобедрений, то його висота *OK* є його медіаною, тобто *EK* = *KD* (рис. 6).

Прямі *AM*, *OK* і *CN* перпендикулярні прямій *ED*, тому паралельні одна одній. Оскільки *AO* = *OC*, то за теоремою Фалеса *MK* = *KN*.

Тоді *ME* = *MK* – *EK* = *KN* – *KD* = *DN*, що й необхідно довести.

Зауважимо, що *OE* = *OD* тому , що ці відрізки є медіанами прямокутних трикутників із спільною гипотенузою й проведені до неї.

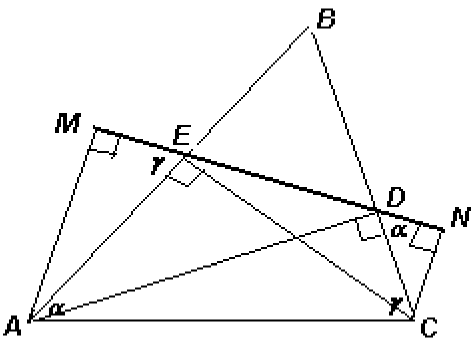

Рис. 5

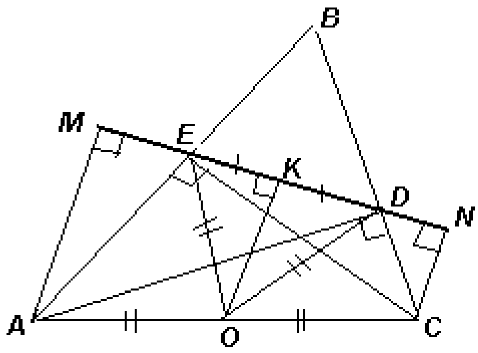

Рис. 6

4. Оскільки $a > 0, b > 0$ і $a \cdot b > 2017a + 2018b$, то $a \cdot > 2017\dfrac{a}{b} + 2018$ (1) і $b > 2017 + 2018\dfrac{b}{a}$ (2).

Додавши нерівності (1) і (2), отримаємо:

$$a + b > 2017\frac{a}{b} + 2018\frac{b}{a} + 2017 + 2018 \geq 2\sqrt{2017\frac{a}{b} \cdot 2018\frac{b}{a}} + 2017 + 2018 = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2.$$

5. Припустимо, що це можливо й така точка *O* існує.

Нехай точкі *A, B, C, D* є вершинами квадрата (порядок розташування вершин довільний), причому *OA* = 2016, OB = 1.

Тоді з нерівності трикутника для точок *O, A, B* одержуємо, що *AB* не більше 2017 (рівність, якщо *O* лежіть на *AB,* при цьому *O* не співпадає ні з *A* ні з *B*).

Можливі випадки: *AB* – це сторона квадрата, або *AB* діагональ. Ураховуючи це, робимо висновок, що довжина сторони квадрата не перевищує 2017. Один з відрізків *BC* і *BD* є стороною квадрата.

Нехай це буде відрізок *BC*. Тоді в трикутнику *OBC* довжина *OC* дорівнює 2018 або 2019, *OB* = 1, *BC* не перевершує 2017.

Якщо *OC*=2019 і BC не перевершує 2017, або *OC*=2018 і *BC* менше 2017, то одержимо протиріччя з нерівністі трикутника.

Якщо ж *OC*=2018 і *BC*=2017, то отримаємо протиріччя із умови одночасної належності точки *O* відрізкам *AB* і *BC*, при цьому *O* не співпадає з *B*. Одержимо протиріччя.

Виходить ситуація, описана в умові, неможлива.

Відповідь: ні, не можуть.

6. Петро першим ходом фарбує квадрат 4×4, що розташований в середині прямокутника (рис. 7). Далі перемогу приносить симетрична відносно вертикальної прямої стратегія. Петро завжди може зробити хід, що симетричний ходові другого, а тому переможе.

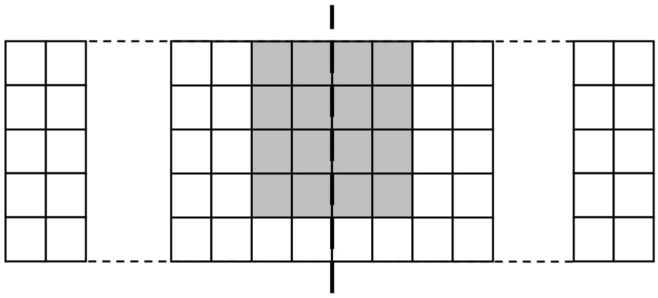

Рис. 7

Відповідь: Петро.

10 клас

1. Із умови задачі маємо

$$\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}=a(b^3+b+1)=b(a^3+a+1).$$

$$ab^3+ab+a=ba^3+ba+b.$$

$$ab^3-ba^3+a-b=0.$$

$$ab(b^2-a^2)+(a-b)=0.$$

$$ab(b-a)(b+a)+(a-b)=0$$

$$(b-a)(ab(a+b)-1)=0$$

$(b-a)=0$ або $ab(a+b)-1=0$

$a=b$ $\qquad\qquad ab(a+b)=1$

За умовою задачі $a\neq b$. Тоді, ураховуючи, що $ab(a+b)=1$, отримаємо

$$(a+b)^3+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)+\frac{2018}{2017+a^2b+b^2a}-a^3-b^3=$$

$= 3\cdot 1 + \frac{2018}{2017+1} = 4$

<u>Відповідь</u>: 4.

2. Сума номерів будинків на одній стороні кварталу дорівнює 423. Визначіть номер будинку, пятого від початку кварталу. Відповідь обґрунтуйте.

Нехай n– число будинків, a – перший, b – останній номери будинків. Оскільки номери будинків зростають на 2, то маємо зростаючу арифметичну прогресію $S = \frac{a+b}{2}\cdot n = 423$. Але 423=3·3·47. Оскільки $n \geq 5$, то n=9. Отже, номер п’ятого (середнього) будинку – 47.

<u>Відповідь</u>: 47.

3. Оскільки $a > 0, b > 0$ і $a \cdot b > 2017a + 2018b$, то $a\cdot > 2017\frac{a}{b} + 2018$ (1) і

$b > 2017 + 2018\frac{b}{a}$ (2).

Додавши нерівності (1) і (2), отримаємо: $a + b > 2017\frac{a}{b} + 2018\frac{b}{a} + 2017 + 2018 \geq 2\sqrt{2017\frac{a}{b}\cdot 2018\frac{b}{a}} + 2017 + 2018 = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$.

4. Припустимо, що це можливо й така точка *O* існує.

Нехай точки *A, B, C, D* є вершинами квадрата (порядок розташування вершин довільний), причому *OA* = 2016, OB = 1.

Тоді з нерівності трикутника для точок *O, A, B* одержуємо, що *AB* не більше 2017 (рівність, якщо *O* лежіть на *AB,* при цьому *O* не співпадає ні з *A* ні з *B*).

Можливі випадки: *AB* – це сторона квадрата, або *AB* діагональ. Ураховуючи це, робимо висновок, що довжина сторони квадрата не перевищує 2017. Один з відрізків *BC* і *BD* є стороною квадрата.

Нехай це буде відрізок *BC*. Тоді в трикутнику *OBC* довжина *OC* дорівнює 2018 або 2019, *OB* = 1, *BC* не перевершує 2017.

Якщо *OC*=2019 і ВС не перевершує 2017, або *OC*=2018 і *BC* менше 2017, то одержимо протиріччя з нерівності трикутника.

Якщо ж *OC*=2018 і *BC*=2017, то отримаємо протиріччя із умови одночасної належності точки *O* відрізкам *AB* і *BC*, при цьому *O* не співпадає з *B.* Одержимо протиріччя.

Виходить ситуація, описана в умові, неможлива.

Відповідь: ні, не можуть.

5. На колі розташовані точки P, A, B, а всередині кола – точка Q таким чином, що $\angle PAQ = 90°$, $PQ = QB$ та точки P і B лежать по різні сторони від прямої AQ. Позначимо через M – середину відрізку PB (рис. 8).

Тоді $\angle PMQ = \angle PAQ = 90°$ і чотирикутник $PAMQ$ – вписаний.

Звідси $\angle APM = \angle AQM$.

Маємо, що

$$\angle AQB - \angle AQP = \angle AQM + \angle MQB - \angle AQP =$$
$$= \angle AQM + (\angle MQP - \angle AQP) = 2\angle AQM = 2\angle APM,$$
що й треба було довести.

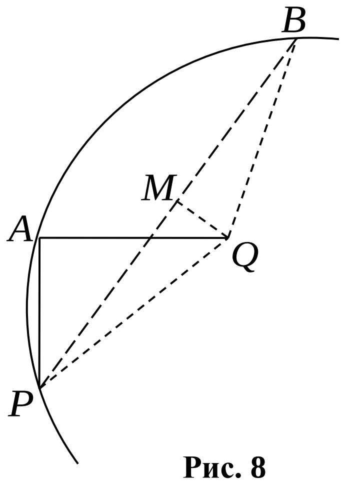

Рис. 8

6. Розглянемо момент після третього ходу (коли виписані три числа). Якщо до цього моменту ще ніхто не виграв, то наступним ходом Василь виграє: йому достатньо знайти два виписаних числа однієї парності й виписати своїм ходом їх середнє арифметичне (воно є цілим числом).

Крім того, помітимо, що коли три цілих числа з множини 1, 2, 3, . . . , 2018 утворюють арифметичну прогресію, то її різниця не більше 1008 (бо різниця між найбільшим і найменшим числами буде не менше 2·1009 = 2018, що неможливо).

Теперь опишемо виграшну стратегію Василя. Нехай першим ходом Петро виписав число *a*. Припустимо, что $a \le 1009$. Тоді Василь виписує то з чисел 2017 чи 2018, парність якого відмінні від парності числа *a* (позначимо це число через *b*).

Після цього ходу виписано два числа різної парності; отже, вони не можуть бути першим і третім членом прогресії з цілих чисел.

Оскільки $b-a > 1009$, вони також не можуть бути сусідніми членами прогресії. Отже, Петро не зможе виграти третім ходом. Але в цьому випадку, як ми бачили раніше, наступним ходом Василь виграє.

Якщо $a > 1010$, то Василь відповідає, виписуючи те з чисел 1 і 2, яке по парності відрізняється від *a*. Подальші роздуми аналогічні першому випадку.

Відповідь: у Василя.

11 клас

1. $y = \left(\log_{2018} x^{2018}\right)^0 \cdot \dfrac{\left|x^3\right| + 8}{x^2 - 2x + 4}.$

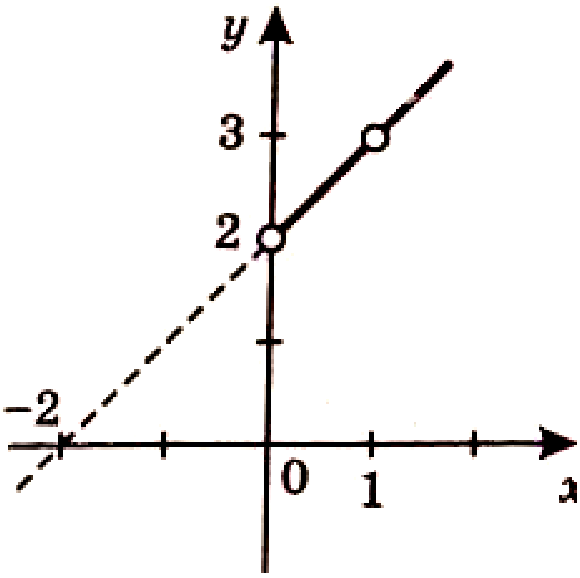

Рис. 9

2. Оскільки $a > 0, b > 0$ і $a \cdot b > 2017a + 2018b$, то $a \cdot > 2017\frac{a}{b} + 2018$ (1) і $b > 2017 + 2018\frac{b}{a}$ (2). Додавши нерівності (1) і (2), отримаємо: $a + b > 2017\frac{a}{b} + 2018\frac{b}{a} + 2017 + 2018 \geq 2\sqrt{2017\frac{a}{b} \cdot 2018\frac{b}{a}} + 2017 + 2018 = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$.

3. $a^{2018}+ b \vdots ab$ (за умовою), звідси $b \vdots a$. Отже, $b = ab_1$, $b_1 \in N$. Підставляємо в умову, отримуємо, що $a^{2018}+ ab_1 \vdots a^2 b_1$.Звідси, $a^{2017}+ b_1 \vdots a b_1$.

Міркуючи так 2017 раз , маємо, що $1+ b_{2018} \vdots a b_{2018}$.

Отже, $1+ b_{2018}$, тобто $b_{2018}=1$.

Тоді $2 \vdots a$, а отже $a=1$ або $a=2$.

Відповідь: (1;1), (2; 2^{2018}).

4. Із умови задачі маємо, що

$\angle PRQ + \angle TRS = \angle PRT$ (*).

Доведемо, що $QPTS$ – паралелограм (рис. 10).

Дійсно, використовуючи рівність кутів при основі в рівнобедрених трикутниках PQR і RST та рівність (*), отримаємо

$\angle QPT+\angle PTS=\angle QPR+\angle RPT+\angle RTP+\angle STR =$
$\angle PRQ+\angle TRS+(180°–\angle PRT)=180°$.

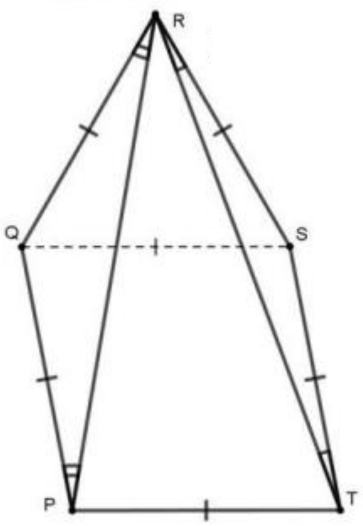

Рис. 10

Таким чином, $PQ \parallel ST$ і $PQ=ST$ (за умовою), тобто $QPTS$ – паралелограм. Тоді $QS = PT$, отже, трикутник QRS – рівносторонній.

Отже, $\angle PRT = 0{,}5\angle QRS = 30°$

Відповідь: 30°.

5. Розглянемо момент після третього ходу (коли виписані три числа). Якщо до цього моменту ще ніхто не виграв, то наступним ходом Василь виграє: йому достатньо знайти два виписаних числа однієї парності й виписати своїм ходом їх середнє арифметичне (воно є цілим числом).

Крім того, помітимо, що коли три цілих числа з множини 1, 2, 3, . . . , 2018 утворюють арифметичну прогресію, то її різниця не більше 1008 (бо різниця між найбільшим і найменшим числами буде не менше 2·1009 = 2018, що неможливо).

Теперь опишемо виграшну стратегію Василя. Нехай першим ходом Петро виписав число a. Припустимо, что $a \leq 1009$. Тоді Василь виписує то з чисел 2017 чи 2018, парність якого відмінні від парності числа a (позначимо це число через b).

Після цього ходу виписано два числа різної парності; отже, вони не можуть бути першим і третім членом прогресії з цілих чисел.

Оскільки $b-a > 1009$, вони також не можуть бути сусідніми членами прогресії. Отже, Петро не зможе виграти третім ходом. Але в цьому випадку, як ми бачили раніше, наступним ходом Василь виграє.

Якщо $a > 1010$, то Василь відповідає, виписуючи те з чисел 1 і 2, яке по парності відрізняється від a. Подальші роздуми аналогічні першому випадку.

Відповідь: у Василя.

6. Якщо припустити, що така функція існує, то, враховуючи, що для кожного $x \in (0; 1)$ справджується рівність $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, тому $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) > 2018^2$, що суперечить тому, що $E_f = (2018, +\infty)$.